УДК 539.3

Олександра Самборська, канд. ф.-м. н., доц.
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

ПРО МОДЕЛЬ ТА ДЕЯКІ АСПЕКТИ ВТРАТИ СТІЙКОСТІ ВОЛОКОН У ОДНОНАПРЯМЛЕНИХ КОМПОЗИТАХ

У цій роботі представлена тривимірна модель однонапрямлених композитів і обговорюються деякі аспекти нестабільності волокон в композитах. По-перше, дано короткий огляд існуючих моделей. Далі представлено відносно просту тривимірну лінеаризовану модель, у якій всі компоненти описуються лінеаризованими рівняннями, а умови на міжфазних поверхнях задовольняються точно.

Ключові слова: однонапрямлені композити, анізотропні волокна, втрата стійкості волокон.

Oleksandra Samborska

ON TNE MODEL AND SOME ACPECTS OF FIBER INSTABILITY IN UNIDIRECTIONAL COMPOSITES

This work presents a three-dimensional model of unidirectional composites and discusses some aspects of fiber instability in the composites. First, a short review of the existing models is given. Then, a relatively simple three-dimensional linearized model is presented, in which all components are described by three-dimensional linearized equations and the interface conditions are rigorously satisfied.

Keywords: unidirectional composites, anisotropic fibers, fiber buckling.

Частка композитних матеріалів у сучасному машинобудуванні, авіаційній промисловості, будівництві та інших галузях техніки постійно зростає. Це викликає необхідність детального дослідження їхньої механічної поведінки та механізмів руйнування при навантаженнях.

Міцність волокнистих композитних матеріалів при стиску значною мірою обмежується можливістю втрати стійкості волокон у матриці. При цьому волокна набувають чітко вираженої синусоїдальної форми з довжиною хвилі, що визначається співвідношенням механічних параметрів матриці та волокон і яка не залежить від розмірів та форми зразка, виготовленого з даного волокнистого композиту. Одним з важливих механізмів руйнування однонапрямлених композитних матеріалів та елементів конструкцій з них у зонах стиску є мікронестійкість, тобто втрата стійкості мікроволокон у матриці, яка викликана порівняно малим ефективним модулем зсуву цих матеріалів.

Цей модуль зсуву G_c може бути визначений як функція механічних параметрів волокон та матриці, а також об'ємної пропорції цих компонентів V_f та V_m. Згідно із спрощеною двовимірною моделлю, він може бути визначений за формулою:

$$\frac{1}{G_C}=\frac{V_f}{G_f}+\frac{V_m}{G_m} \tag{1}$$

Зауважимо, що навіть якщо матриця підсилена дуже жорсткими волокнами, наприклад, $G_f = 100G_m$ і $V_f = V_m = 0,5$, то згідно з формулою (1), отримуємо

$G_m / G_c = 0,505$. Тобто модуль зсуву однонапрямленого композиту збільшується лише у 2 рази порівняно з модулем зсуву самої матриці.

Механізму втрати стійкості волокон у матриці приділено багато уваги у науковій літературі, починаючи від спрощених моделей, які ґрунтуються на аналізі модуля зсуву композиту, і закінчуючи досить точними тривимірними теоріями. Наприклад, Розен (1965 р.) і Шерх (1966 р.) заміняли волокнистий композит на шаруватий, чим значно спрощували постановку та розв'язання задачі. Садовський (1967 р.) розглядав волокна як одновимірні стержні, що вбудовані у тривимірну матрицю, і був змушений вводити додаткові гіпотези щодо взаємодії (контакту) волокон та матриці. Слід зауважити, що введення такого типу радикальних спрощень, як заміна волокнистої структури на шарувату, може привести до значних помилок при отриманні розв'язку задачі.

Розгляд явища внутрішньої втрати стійкості на основі строгого підходу, який ґрунтується на залученні тривимірної лінеаризованої теорії стійкості і моделі кусково-однорідного середовища було вперше запропоновано О.М. Гузем (1969 р.). При вказаному підході тривимірні лінеаризовані рівняння застосовуються окремо до волокон і до матриці, що дає змогу точно сформулювати граничні умови взаємодії між волокнами та матрицею. Огляд результатів, отриманих в рамках даного строгого підходу, наведено у монографії [1].

У цій роботі аналізуються деякі параметри, які впливають на втрату стійкості волокон у матриці. Будемо використовувати тривимірну модель, у якій пружна матриця підсилена періодичним рядом пружних анізотропних волокон з круговим поперечним перерізом радіуса *R*. Будемо вважати, що вкорочення матриці та волокон у напрямку волокон рівні між собою і докритичний стан у компонентах композиту однорідний.

На міжфазних поверхнях можуть бути сформульовані різні граничні умови. У випадку ідеального контакту отримуємо:

$$\mathrm{P}^{fq}_{rr,q} = \mathrm{P}^{m}_{rr,q}, \quad \mathrm{P}^{fq}_{r\theta,q} = \mathrm{P}^{m}_{r\theta,q}, \quad \mathrm{P}^{fq}_{rz,q} = \mathrm{P}^{m}_{rz,q}, \tag{2}$$

$$U^{fq}_{r,q} = U^{m}_{r,q}, \quad U^{fq}_{\theta,q} = U^{m}_{\theta,q}, \quad U^{fq}_{z,q} = U^{m}_{z,q}.$$

Індекси "*f*" та "*m*" означають відповідно "волокно" і "матриця", а індекс "*q*" – номер волокна.

Зауважимо, що умови (2) визначають неперервність зусиль і зміщень на кожній міжфазній поверхні. У випадку ковзного контакту нормальні компоненти цих величин є неперервними, а зсувні зусилля дорівнюють нулю. За наявності вільної поверхні формулюємо наступні граничні умови:

$$\mathrm{P}^{m}_{yx,q} = 0, \quad \mathrm{P}^{m}_{yy,q} = 0, \quad \mathrm{P}^{m}_{yz,q} = 0 \tag{3}$$

Згідно з працею О.М. Гузя [1], в рамках лінеаризованої тривимірної постановки задачі зміщення можна виразити через функції ψ та χ:

$$U_n = \frac{\partial \psi}{\partial s} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial n \partial x_3}, \quad U_s = -\frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial s \partial x_3}, \tag{4}$$

$$U_3 = \left(\omega_{1133} + \omega_{1313}\right)^{-1} \left(\omega_{1111} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + \omega_{3113} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \chi .$$

де функції ψ та χ є розв'язками рівнянь

$$\left(\Delta_1+\zeta_1^2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\psi=0, \quad \Delta_1=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\Theta^2}, \tag{5}$$

$$\left(\Delta_1+\zeta_2^2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\left(\Delta_1+\zeta_3^2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\chi=0.$$

Коефіцієнти $\zeta_i^2\left(i=1,2,3\right)$ у рівняннях (5) залежать від механічних властивостей компонентів композиту.

Застосовуючи ці рівняння до кожного компонента композиту, шукаємо розв'язки у вигляді:

$$\Psi^{fq}=\alpha R^{-1}\sin\left(\pi x_3/L\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{A}_{n,1}^{fq}\mathrm{I}_n\left(\zeta_1^f\alpha R^{-1}r_q\right)\sin n\theta_q+\sum_{n=0}^{\infty}C_{n,1}^{fq}\mathrm{I}_n\left(\zeta_1^f\alpha R^{-1}r_q\right)\cos n\theta_q\right) \tag{6}$$

$$\mathrm{X}^{fq}=\cos\left(\pi x_3/L\right)\sum_{s=2}^{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{A}_{n,s}^{fq}\mathrm{I}_n\left(\zeta_s^f\alpha R^{-1}r_q\right)\cos n\theta_q+\sum_{n=1}^{\infty}C_{n,1}^{fq}\mathrm{I}_n\left(\zeta_s^f\alpha R^{-1}r_q\right)\sin n\theta_q\right).$$

У цих розв'язках $\mathrm{A}_{n,1}^{fq}$ та $C_{n,1}^{fq}$ є невідомими коефіцієнтами, які потрібно визначити так, щоб виконувались сформульовані граничні умови.

Згідно з цими умовами, отримаємо нескінченну однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яку можна записати в матричній формі:

$$\mathrm{M}_{\alpha r}^{mq}\mathrm{X}_r^{mj}+\mathrm{M}_{\alpha r}^{fq}\mathrm{X}_r^{fj}+\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{N}_{\alpha rn}^{q}\mathrm{X}_r^{mj}=0 \tag{7}$$

$$\left(\alpha=1,2;\ j=1,2;\ r=0,1,2,\ldots;\ q=0;\ \pm1;\pm2,\ldots\right).$$

Враховуючи періодичність розв'язків, можна дослідити цю систему тільки, наприклад, для $q=0$.

Згідно з умовою існування нетривіальних розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь прирівнюємо визначник системи (7) до нуля і отримуємо характеристичне рівняння, яке потрібно розв'язати чисельним методом.

Незалежно від виду граничних умов на міжфазних поверхнях, одержаний нескінченний визначник буде визначником нормального типу. Тому при розв'язуванні характеристичного рівняння можна застосувати метод редукції.

Література.

1. Гузь А.Н. Механика разрушения композитных материалов при сжатии.-Київ: Наукова думка, 1990.-632с.

2. Гузь А.Н., Шульга Н.А., Бабич И.Ю. Механика композитов. Т2. Динамика и устойчивость материалов.-Київ: Наукова думка, 1993.-430с.